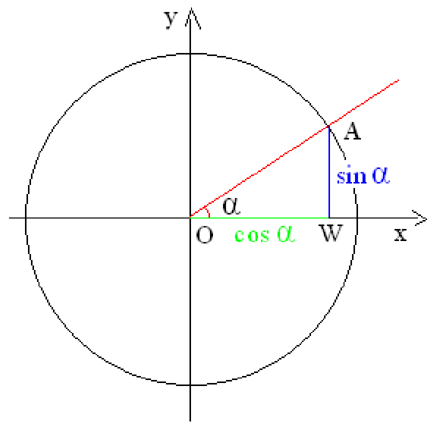
2.16 Richiami di Goniometria e di Trigonometria (video)

Coseno e seno goniometrici

Dato un sistema di assi cartesiani $x0y$, costruiamo una circonferenza di **raggio 1** avente centro coincidente con l'origine degli assi.
Da 0 facciamo partire la semiretta che intercetta la circonferenza nel punto **A**. Dal punto **A** tracciamo il segmento parallelo all'asse delle ordinate **y**. Questo intercetta l'asse delle ascisse x nel punto **W**.
Il triangolo goniometrico (quello di lato **OA**=1) così formato è un triangolo rettangolo (per costruzione) retto nel punto **W**, mentre α rappresenta l'angolo formato dalla semiretta **OA** e l'asse x.



Si definisce **coseno** goniometrico dell'angolo α , indicato con $\cos\alpha$, il rapporto tra il segmento **OW** e il segmento **OA**, ovvero:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OW}}{\overline{OA}} \qquad \textbf{(4)}$$

Ma risultando che $\overline{OA} = 1$, si ottiene:

$$\cos\alpha = \overline{OW} \qquad \textbf{(5)}$$

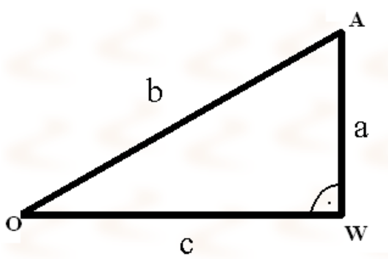
In maniera analoga possiamo definire il **seno** goniometrico dell'angolo α , indicato con $sen\alpha$, il rapporto tra il segmento **AW** e il segmento **OA**, ovvero:

$$sen\alpha = \frac{\overline{AW}}{\overline{OA}} \qquad \textbf{(6)}$$

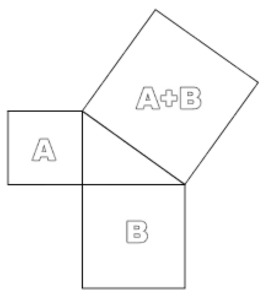
e risultando anche in questo caso $\overline{OA} = 1$, si ottiene:

$$sen\alpha = \overline{AW} \qquad \textbf{(7)}$$

2.17 Relazione fondamentale della goniometria



Tenuto conto che il triangolo OAW per costruzione è un triangolo rettangolo, vale anche per esso il Teorema di Pitagora che recita:



Teorema di Pitagora

La somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.

Traducendo il Teorema di Pitagora in forma algebrica, e non in forma geometrica, possiamo scrivere che:

$$a^2 + c^2 = b^2$$

dove $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$ sono rispettivamente i cateti e $\boldsymbol{b}$ l'ipotenusa.
Se riscriviamo il Teorema di Pitagora per il nostro triangolo goniometrico – come in figura a pag. 31 – otteniamo:

$$\cos^2 \alpha + sen^2\alpha = 1 \qquad \textbf{(8)}$$

che prende il nome di **relazione fondamentale della goniometria**

2.18 Tangente e cotangente goniometrica

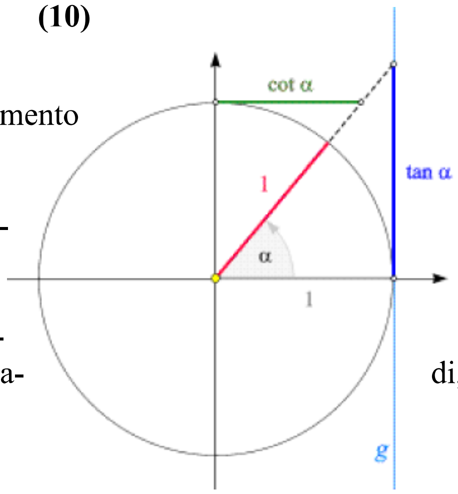
Si definisce **tangente** goniometrica dell'angolo α , indicato con $tg\alpha$, il rapporto tra il segmento *seno* e il *coseno* dell'angolo α, ovvero

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \qquad \textbf{(9)}$$

rappresentata geometricamente come in figura.

In analogia, si definisce **cotangente** goniometrica dell'angolo α , indicato con $ctg\alpha$, il rapporto tra il segmento *coseno* e il *seno* dell'angolo α, ovvero

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} \qquad \textbf{(10)}$$



La tangente è rappresentata, nella figura affianco, con un segmento **blu**, mentre la cotangente con un segmento **verde**.

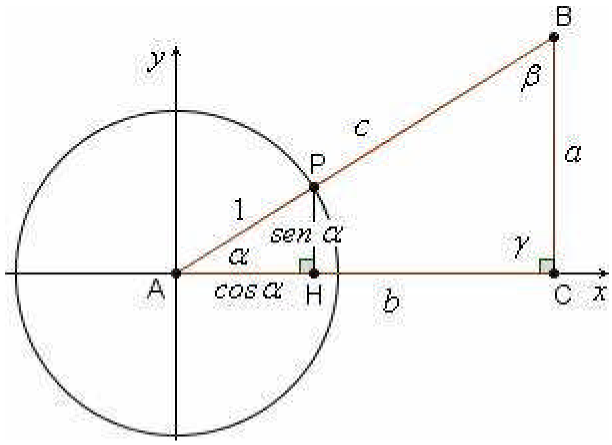
Al fine di rendere agevole l'utilizzo delle suddette funzioni goniometriche, anche senza la calcolatrice scientifica, viene di seguito riportata una tabella contenente i valori delle quattro funzioni goniometriche principali, seno, coseno, tangente e cotangente per gli angoli più noti, espressi sia in radianti che in gradi, dove basti tener conto che π radianti corrispondono a 180°.

Angolo		Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
Radianti	Gradi				
0	0°	0	1	0	∞
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	∞	0
π	180°	0	-1	0	∞
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	∞	0
2π	360°	0	1	0	∞

2.19 Trigonometria (video)

La goniometria, come appena visto, si occupa solo di triangoli aventi ipotenusa unitaria. Ma i vettori con cui ci troveremo a trattare non sempre saranno unitari, quindi si rende necessario un ampliamento dapprima ai triangoli rettangoli avente ipotenusa qualunque e successivamente estendendo i concetti goniometrici anche ai triangoli qualunque.

La **Trigonometria** può essere così definita come l'applicazione dei concetti goniometrici a qualsiasi triangolo.



Se osserviamo i due triangoli rettangoli in figura, **APH** e **ABC**, utilizzando il terzo criterio di similitudine dei triangoli (sono simili i triangolo che hanno rispettivamente congruenti i tre angoli), appare piuttosto semplice dimostrare che i due triangoli sono simili (*hanno in comune l'angolo α, l'angolo retto in **H** e in **C** e di conseguenza il terzo angolo*).

Un teorema della matematica afferma che *se due triangoli sono simili* è possibile scrivere una qualsiasi proporzione che leghi lati corrispondenti.

Possiamo così scrivere la proporzione:

$$\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{PH} : \overline{AH} \qquad \textbf{(11)}$$

sostituendo per ciascuno i valori assunti, otteniamo: